

24/3/21

1.1. $A \in U(3 \times 3, \mathbb{R}) : A^3 - A = 0_{3 \times 3}$

Cayley - Hamilton $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot (\lambda - 1) (\lambda + 1) = 0 :$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1 \Rightarrow A$ διαγωνοποιείται : $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} : A^k = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot P^{-1} =$

$= P \begin{pmatrix} 0^k & & \\ & (-1)^k & \\ & & 1^k \end{pmatrix} P^{-1}$

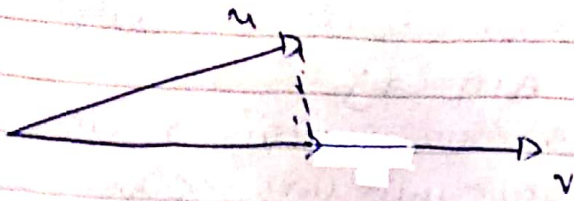
Av $k = 2n + 1 = \text{negittos}$ $(-1)^k = -1$

$A^{2n+1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = A$

Av $k = 2n : \text{apos}$ $(-1)^k = 1$

$A^{2k} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = A^2$

κανονικό υποσύνολο, ορθογώνιο υποσύνολο, ορθοκανονικό υποσύνολο : V : Ευκλείδειος χώρος

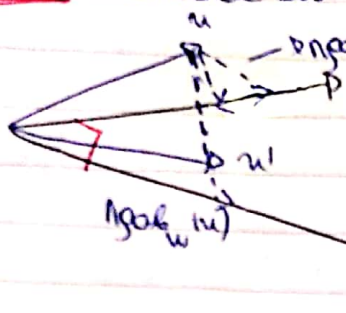


$$\text{proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\| \cdot \|v\|} \cdot v = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

Προβολή σε επίπεδο

Να βρω την προβολή του u στο επίπεδο που δημιουργούν τα u και w

Πύα: Υποθέτω ότι $v \perp w \Rightarrow$ ισχύει το Θεώρημα των 3



$$u' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αξιομ.}}}{t} v + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αξιομ.}}}{s} w = \text{proj}_v(u) + \text{proj}_w(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v + \frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

Γενικεύεται για οποιοδήποτε πλήθος $\perp$ διανυσμάτων
 Δηλ. η προβολή του u στον υπόχωρο που δημιουργείται από τα $\perp$ διανύσματα $\{v_1, \dots, v_k\}$ θα δίνεται από:

$$\text{proj}_Y(u) = \text{proj}_{v_1}(u) + \dots + \text{proj}_{v_k}(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

π.χ. Ν.β. η προβολή του $u = (1, 1, 1)$ στο επίπεδο που σχηματίζεται από τα : $v = (3, 1, 1)$ και $w = (-1, 2, 1)$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

Πύα:

Εξετάζουμε αν $v \perp w \quad \langle (3, 1, 1), (-1, 2, 1) \rangle = -3 + 2 + 1 = 0$

Συμπεραίνει με το προηγούμενο τύπο: $\text{proj}(u) = \text{proj}_v(u) + \text{proj}_w(u) =$

$$= \frac{\langle (1,1,1), (3,1,1) \rangle}{\langle (3,1,1), (3,1,1) \rangle} (3,1,1) + \frac{\langle (1,1,1), (-1,2,1) \rangle}{\langle (-1,2,1), (-1,2,1) \rangle} (-1,2,1) =$$

$$= \frac{5}{11} (3,1,1) + \frac{2}{6} (-1,2,1) = \left(\frac{30-22}{66}, \frac{30+44}{66}, \frac{30+22}{66} \right) =$$

$$= \dots$$

Ορισμός: Μια βάση $\{u_1, \dots, u_k\}$ ενός Ευκλείδειου χώρου V^k καλείται ορθοκανονική, αν το σύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ορθοκανονικό: $\|u_i\| = 1$ και $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ $i \neq j$

Πηλίμα: Ένα ορθογώνιο υποσύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ σε Ευκλείδειο χώρο V είναι γραμ. ανεξ. το ΟΧΙ ΑΝΑΠΟΔΑ

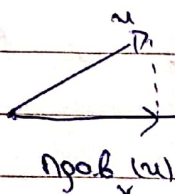
Απόδ.:

Υποθέτουμε ότι $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = \bar{0} \Rightarrow \langle a_1 u_1 + \dots + a_k u_k, u_i \rangle =$
 $= \langle \bar{0}, u_i \rangle = \langle 0 u_i, u_i \rangle = 0 \quad \langle u_i, u_i \rangle = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_1 \langle u_1, u_i \rangle + a_2 \langle u_2, u_i \rangle + \dots + a_i \langle u_i, u_i \rangle + \dots + a_k \langle u_k, u_i \rangle =$
 $= 0 \Rightarrow a_i \langle u_i, u_i \rangle = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \{u_1, \dots, u_k\}$ είναι
 γραμ. ανεξ.

Παρατήρηση: Έστω $\{u_1, \dots, u_k\}$ ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου V και $u \in V$. Αν $a_i = \langle u, u_i \rangle$, τότε:
 $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_k \rangle u_k$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Αν έχουμε μια βάση (ή ένα γραμ. ανεξ. υποσύνολο) μπορούμε να την κάνουμε ορθοκανονική (ορθοκανονική) ???

Πρόταση: Έστω u και v διανύσματα του Ευκλείδειου χώρου V . Το διάνυσμα $u - \text{proj}_v(u)$ είναι $\perp$ με το v .



$u - \text{proj}_v(u) = w \Rightarrow u = w + \text{proj}_v(u)$ Το w το κατασκευάζουμε $\perp v$

$$\begin{aligned}
 \langle u - \text{proj}_V(u), v \rangle &= \langle u, v \rangle - \langle \text{proj}_V(u), v \rangle = \\
 &= \langle u, v \rangle - \left\langle \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \right\rangle = \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow u - \text{proj}_V(u) \perp v
 \end{aligned}$$

Α.χ. Δείξτε ότι τα $u = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$ και $v = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και ευγραφέ το $w = (2, 3)$ ως προς αυτή τη βάση

Αποδ.

$$\begin{aligned}
 \{u, v\} \text{ ορθοκανονικό} : \langle u, v \rangle &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rangle = \\
 &= \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{25} - \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{25} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|u\|^2 : \|u\|^2 = \langle u, u \rangle &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \right\rangle = \\
 &= \frac{5}{25} + \frac{4 \cdot 5}{25} = \frac{25}{25} = 1
 \end{aligned}$$

$$\|v\|^2 = 1$$

$w = (2, 3) = au + bv$. Από το προηγούμενο $a = \langle w, u \rangle$ και $b = \langle w, v \rangle$

$$a = \langle (2, 3), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \rangle = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$b = \langle (2, 3), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \rangle = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$w = -\frac{4\sqrt{5}}{5} u + \frac{7\sqrt{5}}{5} v$$

Πρόταση: Αν το σύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ορθογώνιο στον Ευκλείδειο χώρο V και $v \in V$, τότε το διάνυσμα $v - \text{proj}_{u_1}(v) - \text{proj}_{u_2}(v) - \dots - \text{proj}_{u_k}(v)$ είναι ορθογώνιο προς

κάθε ένα από τα $u_1, \dots, u_k$
 $v - \text{proj}_{u_1}(v) - \dots - \text{proj}_{u_k}(v) \perp u_i \quad i=1, \dots, k$

Απόδ: Όπως και στο πρόβλημα

Gram-Schmidt: Ορθοκανονικοποίηση ενός φ. ανεξ. υποσύνολου

V : Ευκλείδειος χώρος και $\{v_1, \dots, v_k\}$ φ. ανεξ. Θα βρούμε $\{u_1, \dots, u_k\}$ τα οποία θα είναι ορθογώνια και θα εξαργυώνται από τα u_i . Ξεκινάμε θα τα μετρούνουμε σε κανονικά.

Ορίζουμε: $u_1 = v_1$

$u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2)$ (Από την υπόθεση $u_1 \perp u_2$)

$u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_2}(v_3) - \text{proj}_{u_1}(v_3)$ ($u_1 \perp u_3, u_2 \perp u_3$)

και συνεχίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο:

$u_k = v_k - \text{proj}_{u_{k-1}}(v_k) - \text{proj}_{u_{k-2}}(v_k) - \dots - \text{proj}_{u_1}(v_k)$ ($\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ορθογώνιο)

Για να γίνουν κανονικά διαγράφουμε με το μήκος τους.
 $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\}$ ορθοκανονικό υποσύνολο του V

Π.χ: 1) Να μετατρέψετε τη βάση (v_1, v_2, v_3) του $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική. Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

Πάση:

$$1) u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) = (2, 1, 0) - \frac{\langle (2, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} \cdot (1, 0, 1) \\ = (2, 1, 0) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

$$u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_2}(v_3) - \text{proj}_{u_1}(v_3) = (2, 2, 1) - \frac{\langle (2, 2, 1), (1, 1, -1) \rangle}{\langle (1, 1, -1), (1, 1, -1) \rangle} \cdot (1, 1, -1) - \frac{\langle (2, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle}{2} (1, 0, 1) \\ = (2, 2, 1) - \frac{3}{3} (1, 1, -1) - \frac{3}{2} (1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left\{ u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \right\} \\ \text{ορθογώνιο} \quad \left\{ (1, 0, 1), (1, 1, -1), \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\text{Ορθοκανονική: } \left\{ \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}}, \frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{6}} \right\}$$

2) Να μετατρέψετε τη βάση $\{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ με εσωτερικό γινόμενο $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = \langle f, g \rangle$ σε ορθο-

κανονική

Πάση: $f_1 = 1, \quad f_2 = x - \text{proj}_{f_1}(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 dx}{\int_0^1 1^2 dx}$

$$= x - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$f_3 = x^2 - \text{proj}_{f_2}(x^2) - \text{proj}_{f_1}(x^2) = x^2 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle &= \int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\therefore \langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow f_3 &= x^2 - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}} \cdot 1 = x^2 - x + \frac{1}{6} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\{ 1, x, x^2 \} \rightarrow \{ 1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6} \} \quad (**)$$

$$\|1\| = 1, \quad \left\| x - \frac{1}{2} \right\| = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\left\| x^2 - x + \frac{1}{6} \right\| = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{36} - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \right) dx$$

$$\begin{aligned} \left\| x^2 - x + \frac{1}{6} \right\|^2 &= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4}{3} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{36}x \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180} \Rightarrow \left\| x^2 - x + \frac{1}{6} \right\| = \frac{\sqrt{180}}{180} = \frac{3\sqrt{10}}{180} = \frac{\sqrt{10}}{60} \end{aligned}$$

$$(*) = \left\{ 1, \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}}, \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{10}}{60}} \right\} : \text{ορθοκανονικό}$$

$$\rightarrow \left\{ 1, \frac{6}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right), \frac{60}{\sqrt{10}} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \right\} \rightarrow D$$

$$\rightarrow \left\{ 1, \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{2} \right), 6\sqrt{10} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \right\}$$

Ορισμοί: 1) Αν V είναι ένας Ευκλείδειος χώρος W υπόχωρος του V και $u \in V$, θα λέμε ότι το u είναι κάθετο στον W ($u \perp W$) αν το u είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του W .

2) Αν W και Z είναι υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου V , θα λέμε ότι ο W είναι κάθετος στον Z , $W \perp Z$, αν κάθε διάνυσμα του W είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του Z .

3) Αν V είναι Ευκλείδειος χώρος και Z υπόχωρος, ένας υπόχωρος W θα καλείται ορθό συμπληρώμα του Z στον V αν ισχύει ότι:

$$Z \oplus W = V \text{ και } Z \perp W. \text{ Γράψαμε: } W = Z^\perp$$

Θεώρημα: Αν $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου V^n , τότε υπάρχει ορθοκανονικό υποσύνολο $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ ώστε ο υπόχωρος που παράγεται από το $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ να αποτελεί ορθό συμπληρώμα του υπόχωρου που παράγεται από το $\{u_1, \dots, u_k\}$.

Απόδ.

$\{u_1, \dots, u_k\}$ γρ. ανεξ. $\Rightarrow$ βάση του $Y = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \Rightarrow \dim Y = k$

Η διάσταση ενός ευθέως συμπληρώματος θα είναι $n-k$.
Επιτείνουμε τη βάση του Y σε βάση του V : $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$
: βάση του V .

Ορθοκανονικοποιούμε την προηγούμενη βάση:

$$(z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_{n-k})$$

$$Y = \langle z_1, \dots, z_k \rangle \quad \text{και} \quad W = \langle w_1, \dots, w_{n-k} \rangle$$

Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε το: $(z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_{n-k})$
γνωρίζουμε ότι:

1) $(z_1, \dots, z_k)$: ορθοκανονική βάση του Y
 $(w_1, \dots, w_{n-k})$: $\perp$ $\dots$ $\perp$ W

2) $Y \cap W = \{0\}$ } Από τη γραφή
 $v \oplus w = v$

3) $Y \perp W$. Από την πρόταση που είχαμε φράξει έχουμε ότι:
κάθε w_i είναι $\perp$ σε κάθε z_j για $i=1, \dots, n-k$ και $j=1, \dots, k$

Άρα κάθε διάνυσμα του Y είναι $\perp$ σε κάθε διάνυσμα του W

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_k z_k \in Y, \quad b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_{n-k} w_{n-k} \in W$$

$$\begin{aligned} &\langle a_1 z_1 + \dots + a_k z_k, b_1 w_1 + \dots + b_{n-k} w_{n-k} \rangle = \langle a_1 z_1 + \dots + a_k z_k, b_1 w_1 \rangle + \dots \\ &+ \langle a_1 z_1 + \dots + a_k z_k, b_{n-k} w_{n-k} \rangle = \\ &= a_1 b_1 \langle z_1, w_1 \rangle + a_2 b_1 \langle z_2, w_1 \rangle + \dots + a_k b_1 \langle z_k, w_1 \rangle + \dots + a_1 b_{n-k} \langle z_1, w_{n-k} \rangle \\ &+ \dots + a_k b_{n-k} \langle z_k, w_{n-k} \rangle = 0 = 0 \quad Y \perp W \Rightarrow W = Y^\perp \end{aligned}$$

Π.χ.: 1) $\mathbb{R}^4$ κανονικό ευκλ. γινόμενο $W = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$

Π.β. ορθοκανονική βάση του W και το $W^\perp$

$$((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) = \text{βάση του } \mathbb{R}^4$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

$$a_1 = v_1$$

$$a_2 = v_2 - \text{proj}_W(v_2) = (1, 0, 1, 0) - \frac{\langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1) \rangle} \cdot (1, 1, 1, 1) =$$

$$= (1, 0, 1, 0) - \frac{3}{4} (1, 1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$u_2' = 2u_2 = (1, -1, 1, -1)$$

$$u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_2'}(v_3) - \text{proj}_{u_1}(v_3) = (1, 0, 0, 0) - \frac{\langle (1, 0, 0, 0), (1, -1, 1, -1) \rangle}{\langle (1, -1, 1, -1), (1, -1, 1, -1) \rangle} (1, -1, 1, -1) - \frac{\langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle}{4} (1, 1, 1, 1)$$

$$u_3 = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{4} (1, -1, 1, -1) - \frac{1}{4} (1, 1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$u_3' = 2u_3 = (1, 0, -1, 0)$$

$$u_4 = v_4 - \text{proj}_{u_3'}(v_4) - \text{proj}_{u_2'}(v_4) - \text{proj}_{u_1}(v_4) = (0, 1, 0, 0) - \frac{\langle (0, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0) \rangle}{4} (1, 0, -1, 0) - \frac{\langle (0, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1) \rangle}{4} (1, -1, 1, -1) - \frac{\langle (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle}{4} (1, 1, 1, 1) = (0, 1, 0, 0) - \frac{1}{4} (1, 1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

$$u_4' = 4u_4 = (-1, 3, -1, -1)$$

$$W = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$$

$$W^\perp = \langle (1, 0, -1, 0), (-1, 3, -1, -1) \rangle$$

κανονικοποιήσε $W = \left\langle \frac{(1, 1, 1, 1)}{2}, \frac{(1, -1, 1, -1)}{2} \right\rangle =$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\rangle$$

$$W^\perp = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

π.χ. Στο $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο
δίνονται οι υπόχωροι: $Y = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$ και
 $W = \{(x, y, 0) \mid x = y\}$. Να εξετάσετε αν $Y \perp W$.

Λύση:

Βάση για Y : $(x, y, z) = (x, -x, z) = (x, -x, 0) + (0, 0, z) =$
 $= x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) \Rightarrow Y = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$

Βάση για W : $(x, y, 0) = (x, x, 0) = x(1, 1, 0) \quad W = \langle (1, 1, 0) \rangle$

$Y \perp W \Leftrightarrow$ κάθε στοιχείο της βάσης του Y είναι $\perp$ σε κάθε
στοιχείο της βάσης του W

$$\left. \begin{array}{l} (1, -1, 0) \perp (1, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \perp (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow Y \perp W$$